Derivate, differenziali e logaritmi per lo studio della macroeconomia

1

1. Introduzione

In questa sezione esaminiamo in modo sintetico (privilegiando l'intuizione rispetto al rigore) alcuni argomenti matematici che vengono utilizzati più volte sia nel testo di Mankiw sia negli Approfondimenti del presente CD-Rom. Il nostro punto di vista è: in che modo questi strumenti di analisi matematica ci aiutano a comprendere o a descrivere meglio le relazioni che si stabiliscono tra le variabili macroeconomiche?

Molti modelli macroeconomici si occupano di grandezze che variano nel corso del tempo, in modo autonomo o a causa della variazione di altre grandezze. Per affrontare lo studio di questi modelli, è necessario saper descrivere in modo preciso queste variazioni. In generale, sappiamo dallo studio della matematica che possiamo studiare variazioni che avvengono nel *discreto* oppure nel *continuo*. La maggior parte delle variabili economiche (con l'esclusione di alcuni *prezzi* particolari, quali i tassi di cambio tra le monete di diversi paesi e alcuni tassi d'interesse) viene osservata a intervalli di tempo discreti; per alcuni flussi, in particolare, l'intervallo di misurazione è piuttosto lungo: un trimestre o un anno. In questi casi sembra molto più naturale utilizzare strumenti di analisi matematica nel discreto. Benché questa osservazione sia corretta, molto spesso anche nelle analisi discrete (nelle quali si fa riferimento a «saggi di variazione» oppure a «differenziali») si utilizzano concetti propri dell'analisi continua, come le «derivate». A volte l'utilizzo congiunto di questi strumenti può suscitare qualche confusione: uno scopo di questa sezione è proprio cercare di aiutarvi a superare questo tipo di imbarazzo nei confronti della matematica applicata alla macroeconomia.

Questa sezione è organizzata nel modo seguente.

- Nei paragrafi 2 e 3 passeremo in rassegna alcune definizioni e concetti di base, relativi rispettivamente all'uso dei logaritmi e al calcolo delle derivate.

Nei paragrafi successivi ci occuperemo invece di argomenti che hanno applicazioni più immediatamente economiche. Il punto di partenza è il *differenziale totale di una funzione*:

- Nel paragrafo 4 definiremo i differenziali totali e parziali facendo riferimento a una funzione di produzione.
- Nel paragrafo 5 ne ricaveremo il teorema di Eulero (ossia, la teoria neoclassica della distribuzione e dell'esaurimento del prodotto).
- Nel paragrafo 6 ne ricaveremo l'equazione che consente di misurare le fonti della crescita.

Gli ultimi due paragrafi sono invece dedicati alla definizione e alla rappresentazione grafica dei tassi di crescita.

- Nel paragrafo 7 (partendo ancora dal differenziale totale di una funzione) esamineremo la definizione dei tassi di crescita.
- Nel paragrafo 8 studieremo come rappresenta-

re, analiticamente e geometricamente, una variabile che cresce a un tasso uniforme.

2. I logaritmi naturali

- Con il simbolo e indichiamo il numero irrazionale (2,718281…) usato come base dei logaritmi naturali.
- Con la notazione $\ln K$ oppure $\ln (K)$ ci riferiamo per l'appunto al logaritmo naturale del numero K.
- Definiamo *logaritmo naturale* di un numero reale positivo x, $\ln (x)$, l'esponente z che soddisfa l'eguaglianza:

$$x = e^z = e^{\ln (x)}$$

ossia l'esponente che bisogna apporre alla base e per ottenere il numero x.

Le proprietà fondamentali dei logaritmi naturali (utilizzate anche nel paragrafo 3 per il calcolo delle derivate) sono pertanto uguali alle proprietà degli esponenti:

$$\ln (xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln (x/y) = \ln x - \ln y$$

$$\ln (x^N) = N \ln x$$

3. Variazioni, derivate e regole di derivazione

- Definiamo *variazione* di una grandezza la differenza tra due qualsiasi valori, K_1 e K_2, che essa può assumere, e la indichiamo con ΔK. Perciò: $\Delta K = K_2 - K_1$.
- Definiamo saggio di variazione, o *rapporto incrementale*, il rapporto tra le due variazioni: $\Delta Y/\Delta K$.
- Definiamo *derivata* di Y rispetto a K, indicata con il simbolo $\delta Y/\delta K$, il limite a cui tende il rapporto incrementale $\Delta Y/\Delta K$ se la variazione ΔK tende a zero, ossia:

$$\frac{\delta Y}{\delta K} = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta K}$$

Ricordiamo che, dal punto di vista geometrico, la *pendenza* (o inclinazione) di una funzione in un punto è misurata dalla derivata della funzione valutata in quel punto.

Dal punto di vista economico, inoltre, la derivata di una funzione di produzione rispetto alla quantità di un fattore misura la *produttività marginale* associata a quella quantità di fattore.

Ricordiamo alcune regole di derivazione di uso frequente. In generale, data la funzione: $Y = F(K, L)$, possiamo indicare la sua derivata rispetto, ad esempio, a K con la notazione $\delta Y/\delta K$ oppure più semplicemente con la notazione F'_K (e l'indice K può essere omesso se Y è funzione di una sola variabile).

3.1. Regole di derivazione e derivate di uso frequente

Funzione	*Derivata (di Y rispetto a K)*
$Y = a + bK$	$\delta Y/\delta K = b$
$= a + bK^2$	$= b2K$
$= a + bK^N$	$= bNK^{N-1}$
$= F(K) + G(K)$	$= F'(K) + G'(K)$
$= F(K)G(K)$	$= F'(K)G(K) + G'(K)F(K)$
$= F(K)/G(K)$	$= \dfrac{F'(K)G(K) - G'(K)F(K)}{[G(K)]^2}$
$= \ln K$	$= 1/K$
$= \ln (F(K))$	$= F'_K/F(K)$
$= \ln (bK)$ $= \ln b + \ln K$	$= 1/K$
$= \ln (bK^N)$ $= \ln b + N \ln K$	$= N/K$
$= \ln (a + bK)$	$= b/(a + bK)$
$= e^K$	$= e^K$
$= a + be^K$	$= be^K$
$= a + be^{MK}$	$= bM\, e^{MK}$

3.2. Derivate logaritmiche ed elasticità

L'*elasticità* è il rapporto tra le variazioni proporzionali di due grandezze. Il modo più preciso di definire e calcolare le elasticità è come elasticità *puntuali*: in tale dimensione, l'elasticità tra R e S è uguale alla derivata logaritmica di R rispetto a S:

$$\eta(R, S) = \frac{\delta \ln R}{\delta \ln S} = \frac{S}{R}\frac{\delta R}{\delta S} \tag{1}$$

3.3. Derivata di una funzione implicita e saggio marginale di trasformazione

In questo esempio impariamo a calcolare in modo immediato il tasso marginale di trasformazione da una funzione di utilità. Supponiamo di avere una funzione di utilità con due argomenti (che possono essere indifferentemente due beni consumati oggi, oppure il consumo di oggi e il consumo di domani):

$$U = U(X, Y) \tag{2}$$

Come ottenere direttamente da questa espressione il tasso marginale di sostituzione, ossia la pendenza delle curve d'indifferenza? Osserviamo che una qualsiasi curva d'indifferenza è definita dall'espressione $U(X, Y) = U°$, ovvero:

$$U(X, Y) - U° = 0 \tag{3}$$

dove $U°$ è il livello costante di utilità al quale valutiamo la curva d'indifferenza. La (3) definisce una *funzione implicita*: vale a dire che, per verificare l'uguaglianza (3), X deve assumere valori diversi, a seconda dei valori assunti da Y (o viceversa, se fosse la X a muoversi in modo indipendente).

Il teorema della funzione implicita, o *identità di Roy*,[1] dice che:

[1] Roy si pronuncia alla francese: *ruà*.

$$TMS(X,Y) \equiv \left.\frac{\delta X}{\delta Y}\right|_{U^\circ} = -\frac{\dfrac{\delta U}{\delta Y}}{\dfrac{\delta U}{\delta X}} = -\frac{UMa(Y)}{UMa(X)} \qquad (4)$$

A parole, il tasso marginale di sostituzione (TMS) di X in termini di X (ossia la derivata di X rispetto a Y lungo una curva d'indifferenza) è uguale al rapporto tra le utilità marginali (UMa) di Y e di X, cambiato di segno. Naturalmente, potete scambiare X con Y nella (4), e otterrete l'espressione simmetrica.

Troverete un'applicazione di questa identità nell'Approfondimento D.4. Ma ricordate che l'identità di Roy è un teorema valido per qualsiasi funzione implicita: vi tornerà utile applicarlo anche in casi diversi dalle curve d'indifferenza.[2]

4. Il differenziale totale di una funzione

La prima domanda riguardo all'economia che ci poniamo in questo paragrafo è: data una funzione di produzione, di quanto varia il prodotto totale al variare della quantità di uno o di entrambi i fattori?

Consideriamo, come esempio, la funzione di produzione studiata nei capitoli 3 e 7 del testo di Mankiw:

$$Y = F(K, L) \qquad (5)$$

Ricordiamo, dal paragrafo precedente, la distinzione tra variazione (discreta) e derivata. A partire da questi due concetti, introduciamo ora la definizione di *differenziale*. Lo studio del differenziale di una funzione ci consente di rispondere, sia pure in via approssimativa, alla domanda proposta. Il *differenziale totale* della funzione di produzione è:

$$\Delta Y = \frac{\delta Y}{\delta K}\Delta K + \frac{\delta Y}{\delta L}\Delta L \qquad (6)$$

mentre i due differenziali parziali sono:

$$\Delta Y = \frac{\delta Y}{\delta K}\Delta K \quad \text{e} \quad \Delta Y = \frac{\delta Y}{\delta L}\Delta L \qquad (7)$$

L'equazione (6) dice che il differenziale totale della variabile Y (il prodotto) è pari alla variazione totale del fattore K moltiplicata per la derivata di Y rispetto a K, più la variazione totale del fattore L moltiplicata per la derivata di Y rispetto a L.

Nel linguaggio dell'economia, possiamo dire che l'aumento del prodotto totale è pari all'aumento della quantità di capitale, moltiplicata per la sua *produttività marginale*, PMK, più l'aumento della quantità di lavoro, anch'essa moltiplicata per la sua produttività marginale, PML. Tuttavia questa affermazione è vera solo in via approssimata. Vediamo perché.

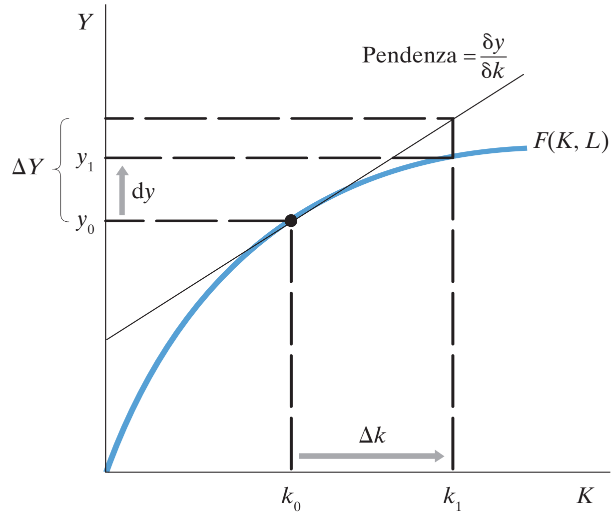

Figura 1
Il differenziale ΔY, calcolato in base all'equazione (7), sovrastima la variazione effettiva di Y, data la concavità della funzione di produzione

Notiamo infatti che il differenziale indica variazioni discrete, mentre la derivata indica variazioni *puntuali* delle variabili considerate. Per comprendere meglio le implicazioni di questa osservazione, consideriamo ad esempio il differenziale parziale di Y rispetto a K (equazione 7).

L'equazione (7) è rappresentata nella figura 1, nell'ipotesi che la funzione di produzione sia *concava*. Essa chiarisce che il differenziale ΔY misura la variazione effettiva di Y solo in via approssimata. Ossia, il differenziale misura la variazione di Y in corrispondenza di una variazione ΔK che si avrebbe se la funzione $Y = F(K, \ldots)$ avesse per tutto l'intervallo ΔK la stessa pendenza che è misurata, in un punto, dalla derivata $\delta y/\delta k$. Se indichiamo la variazione effettiva di Y corrispondente alla variazione di K con dY, ossia $dY = Y_1 - Y_0$ (vedi figura 1), allora per una funzione concava

$$\Delta Y = dY + u$$

dove u è l'errore dovuto all'approssimazione lineare. Questo errore è tanto minore:

- quanto più *breve* è l'intervallo ΔK, oppure
- quanto più *lineare* è la funzione studiata.

5. Rendimenti di scala e teorema di Eulero

Nel capitolo 3 del testo viene proposto il teorema di Eulero.[3] Riprendiamone la derivazione. Consideriamo ancora la fun-

[2] La dimostrazione del teorema è molto semplice: è sufficiente calcolare la derivata totale della funzione implicita rispetto a Y (oppure a X) e riordinare i termini. Se non ci riuscite, cercate su un buon libro di microeconomia, ad esempio Varian, H., *Microeconomia*, Cafoscarina, Venezia, 1990, cap. 4, appendice.

[3] Eulero, un famoso matematico tedesco vissuto nel diciottesimo secolo, si occupò dell'applicazione della matematica – e soprattutto del calcolo dif-

zione di produzione (5), ma questa volta ipotizziamo che vi siano rendimenti di scala costanti.

Rendimenti di scala costanti La funzione di produzione (5) ha rendimenti di scala costanti se, per una qualsiasi quantità positiva di fattori, K_1 e L_1, detto Y_1 il prodotto ottenuto in corrispondenza di tali quantità, ossia $Y_1 = F(K_1, L_1)$, e dato un numero $q > 0$, vale la seguente relazione:

$$qY_1 = Y_2 = F(qK_1, qL_1) \tag{8}$$

A parole, se moltiplico entrambi i fattori per uno stesso numero positivo – ossia, li faccio aumentare ($q > 1$) oppure diminuire ($q < 1$) nella stessa proporzione – è chiaro che la quantità di prodotto varia nella stessa direzione: se, in particolare, vale l'ipotesi di rendimenti di scala costanti, allora la quantità di prodotto varia anch'essa nella stessa *proporzione*, ossia $Y_2 = qY_1$.

Un'applicazione Se una funzione di produzione ha rendimenti di scala costanti, dividendo i fattori per un qualsiasi numero, il prodotto viene diviso per lo stesso numero. Nulla vieta, in particolare, di dividere i fattori nella funzione di produzione (5) per la quantità di lavoro. Otteniamo pertanto:

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right)$$

ovvero, con una notazione più sintetica:

$$y = f(k) \tag{9}$$

In questa forma ci si riferisce alla funzione di produzione in forma intensiva rispetto al lavoro.

Teorema di Eulero (di esaurimento del prodotto). Calcoliamo il differenziale totale (come nell'equazione 6) per la funzione di produzione (8), ponendo $\Delta z = q$. Ossia:

$$\Delta zY = \frac{\delta Y}{\delta K}\Delta zK + \frac{\delta Y}{\delta L}\Delta zL \tag{10}$$

(Si deve intendere che $\Delta Y = \Delta zY$; $\Delta K = \Delta zK$; $\Delta L = \Delta zL$.)

Se vale la (8), essa vale per qualsiasi valore Δz, e in particolare per $\Delta z = 1$. Sostituendo questo particolare valore otteniamo:

$$Y = \frac{\delta Y}{\delta K}K + \frac{\delta Y}{\delta L}L \tag{10$'$}$$

che, tradotta in linguaggio economico, diviene:

$$Y = PMK\,K + PML\,L \tag{10$''$}$$

ovvero, se i fattori di produzione sono remunerati in base alle rispettive produttività marginali, e se la funzione di produzione ha rendimenti di scala costanti, allora la remunerazione dei fattori copre l'intero valore della produzione.

Esempio. La funzione di produzione Cobb-Douglas

La funzione Cobb-Douglas con rendimenti di scala costanti è:

$$Y = AK^{\beta}L^{1-\beta} \tag{11}$$

con $0 < \beta < 1$.

Supponiamo che ogni fattore sia remunerato in base alla propria produttività marginale. Dalla (11) possiamo calcolare le produttività marginali:

$$PMK \equiv \frac{\delta Y}{\delta K} = \beta AK^{\beta-1}L^{1-\beta} = \beta\frac{Y}{K} \tag{12.a}$$

e

$$PML \equiv \frac{\delta Y}{\delta L} = (1-\beta)AK^{\beta}L^{-\beta} = (1-\beta)\frac{Y}{L} \tag{12.b}$$

e pertanto, se w/P è il salario reale e ρ/P è la rendita reale per unità di capitale, la remunerazione dei fattori è rispettivamente:

$$\frac{\rho}{P}K = \beta\frac{Y}{K}K = \beta Y \tag{13.a}$$

$$\frac{w}{P}L = (1-\beta)\frac{Y}{L}L = (1-\beta)Y \tag{13.b}$$

Pertanto, l'equazione della distribuzione del prodotto è

$$\frac{\rho}{P}K + \frac{w}{P}L = \beta Y + (1-\beta)Y = Y \tag{14}$$

il che prova che se i fattori sono remunerati in base alle rispettive produttività marginali, l'intero prodotto viene esattamente distribuito ai fattori.

6. Le fonti della crescita

Il differenziale totale della funzione di produzione e il teorema di Eulero forniscono anche la base per valutare empiricamente il contributo dei diversi fattori alla crescita economica. Questa analisi è presentata nel testo in riferimento agli Stati Uniti (Appendice al capitolo 8) e, per l'Italia qui, nell'Approfondimento A.3.

Riprendiamo la funzione di produzione Cobb-Douglas:

$$Y = AK^{\beta}L^{1-\beta} \tag{11}$$

e calcoliamone il differenziale totale, non solo rispetto alla quantità dei fattori ma anche rispetto alla variazione del parametro A (che rappresenta lo stato del progresso tecnologico, ovvero la *produttività totale* dei fattori). Otteniamo:

ferenziale e integrale – a quasi tutte le discipline scientifiche dell'epoca, tranne l'economia. Tuttavia (immaginiamo che lui sarebbe il primo a esserne sorpreso) nel nostro secolo è divenuto uno dei matematici più citati dagli economisti.

$$\Delta Y = \frac{\delta Y}{\delta A}\Delta A + \frac{\delta Y}{\delta K}\Delta K + \frac{\delta Y}{\delta L}\Delta L \tag{15}$$
$$= (K^{\beta}L^{1-\beta})\Delta A + (\beta A K^{\beta-1}L^{1-\beta})\Delta K$$
$$+ (1-\beta)AK^{\beta}L^{-\beta})\Delta L$$
$$= \frac{Y}{A}\Delta A + \beta\frac{Y}{K}\Delta K + (1-\beta)\frac{Y}{L}\Delta L$$

A questo punto possiamo dividere entrambi i membri per Y, e otteniamo:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \beta\frac{\Delta K}{K} + (1-\beta)\frac{\Delta L}{L} \tag{16}$$

Questa è l'equazione utilizzata negli studi quantitativi sulle fonti della crescita. Ricordiamo inoltre che, se i fattori sono remunerati in base alle rispettive produttività marginali, β e $(1-\beta)$ rappresentano le *quote distributive* dei due fattori rispetto al reddito totale.

7. La scomposizione di un tasso di crescita

In svariate situazioni è necessario scomporre la variazione totale di una variabile composta nella variazione delle sue componenti. In questo paragrafo consideriamo due esempi:

- Come scomporre la variazione del PIL nominale tra la componente reale e quella dovuta all'inflazione?
- Come scomporre la variazione del rapporto capitale-lavoro tra variazione del capitale e variazione del lavoro?

La prima cosa da realizzare è che possiamo effettuare queste scomposizioni, da un punto di vista analitico, nel discreto oppure nel continuo.

7.1. Il tasso di crescita di un prodotto: PIL nominale e PIL reale

Definiamo PY il PIL misurato a prezzi correnti (PIL nominale).

- Supponiamo dapprima di volere analizzare la sua variazione rispetto al tempo *nel continuo*. Calcoliamo perciò la derivata logaritmica di PY rispetto al tempo:

$$\frac{\delta \ln(PY)}{\delta t} = \frac{1}{PY}\frac{\delta(PY)}{\delta t} \tag{17}$$
$$= \frac{1}{PY}\left(\frac{\delta P}{\delta t}Y + \frac{\delta Y}{\delta t}P\right)$$
$$= \frac{\delta P}{\delta t}\frac{1}{P} + \frac{\delta Y}{\delta t}\frac{1}{Y}$$
$$= \frac{\delta \ln(P)}{\delta t} + \frac{\delta \ln(Y)}{\delta t}$$

ossia: il tasso di variazione istantaneo di PY è uguale alla somma dei tassi di variazione istantanei di P (il tasso d'inflazione) e di Y (il tasso di crescita del prodotto reale).

- Nel discreto la variazione di PY è indicata da $\Delta(PY)$. Possiamo effettuare la seguente scomposizione esatta:

$$\Delta(PY) = P_1Y_1 - P_0Y_0 \tag{18}$$
$$= (\Delta P + P_0)(\Delta Y + Y_0) - P_0Y_0$$
$$= \Delta P\Delta Y + P_0\Delta Y + \Delta PY_0 + P_0Y_0 - P_0Y_0$$
$$= \Delta P\Delta Y + P_0\Delta Y + \Delta PY_0$$

- Tuttavia, nell'uso pratico (e se le variazioni ΔP e ΔY non sono molto grandi) si tende a trascurare il primo termine a destra dell'uguale, in quanto è di un ordine di grandezza inferiore rispetto agli altri due termini. Si adotta perciò l'approssimazione:

$$\Delta(PY) \approx \Delta PY_0 + \Delta YP_0 \tag{19}$$

che, dividendo per P_0Y_0, diviene (trascurando gli indici di tempo):

$$\frac{\Delta(PY)}{PY} \approx \frac{\Delta P}{P}\frac{Y}{Y} + \frac{\Delta Y}{Y}\frac{P}{P} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta Y}{Y} \tag{20}$$

ossia, la variazione proporzionale di PY è uguale alla somma delle variazioni proporzionali di P (il tasso d'inflazione) e di Y (il tasso di crescita del prodotto reale). Questa approssimazione è formalmente analoga alla formula esatta che vale nel continuo, data dall'equazione (17).

7.2. Il tasso di crescita di un rapporto: il rapporto capitale-lavoro

Nell'equazione (9) abbiamo introdotto la funzione di produzione in forma intensiva rispetto al lavoro. La variabile cruciale per determinare l'evoluzione del prodotto pro capite è naturalmente il rapporto capitale-lavoro, k. Come descrivere l'evoluzione nel tempo di questa variabile?

- Nel continuo possiamo adottare una trasformazione logaritmica e verificare che:

$$\frac{\delta \ln(k)}{\delta t} = \frac{1}{k}\frac{\delta(k)}{\delta t} \tag{21}$$
$$= \frac{L}{K}\left(\frac{\delta K}{\delta t}L - \frac{\delta L}{\delta t}K\right)\frac{1}{L^2}$$
$$= \frac{1}{K}\frac{\delta K}{\delta t} - \frac{1}{L}\frac{\delta L}{\delta t}$$
$$= \frac{\delta \ln(K)}{\delta t} - \frac{\delta \ln(L)}{\delta t}$$

ossia, il tasso di variazione istantaneo di k è uguale alla differenza tra i tassi di variazione istantanei di K e di L.

► Nel discreto,

$$\Delta k = \frac{K_1}{L_1} - \frac{K_0}{L_0} = \frac{K_1 L_0 - K_0 L_1}{L_1 L_0}$$
$$= \frac{(\Delta K + K_0)L_0 - K_0(\Delta L + L_0)}{L_0 L_1}$$
$$= \frac{\Delta K L_0 + K_0 L_0 - K_0 \Delta L - K_0 L_0}{L_0 L_1}$$
$$= \frac{\Delta K L_0 - K_0 \Delta L}{L_0 L_1}$$

e in termini proporzionali

$$\frac{\Delta k}{k_0} = \frac{L_0}{K_0}\left(\frac{\Delta K}{L_1} - \frac{K_0 \Delta L}{L_0 L_1}\right) = \frac{L_0}{L_1}\frac{\Delta K}{L_0} - \frac{L_0}{L_1}\frac{\Delta L}{L_0} \tag{22}$$
$$= \frac{L_0}{L_1}\left(\frac{\Delta K}{K_0} - \frac{\Delta L}{L_0}\right) = \frac{\frac{\Delta K}{K_0} - \frac{\Delta L}{L_0}}{1 + \frac{\Delta L}{L_0}}$$

ossia la variazione proporzionale del rapporto k è uguale alla variazione proporzionale del dividendo K meno la variazione proporzionale del divisore L, il tutto diviso per uno più la variazione proporzionale del divisore.

In genere tuttavia nel calcolo discreto si trascura il denominatore di questa espressione, ossia si approssima la variazione proporzionale del rapporto, in analogia con l'espressione valida nel continuo, con

$$\frac{\Delta k}{k_0} \approx \frac{\Delta K}{K_0} - \frac{\Delta L}{L_0} \tag{23}$$

8. La crescita a tasso costante e i grafici semilogaritmici

8.1. La crescita a tasso costante

Molte variabili macroeconomiche cambiano valore nel corso del tempo. Di molte di esse, a cominciare dal PIL, la prima informazione che spesso si vuole conoscere è: qual è il tasso di crescita?

In genere un punto di riferimento naturale è fornito da una variabile che cresce a un tasso costante. Quale ne è la corrispondente rappresentazione analitica? E quale ne è la migliore rappresentazione grafica?

È chiaro, ad esempio, che una semplice funzione lineare rispetto al tempo non ha un tasso di crescita costante. Il tasso di crescita di

$$Y = a + bT \tag{24}$$

è, in ciascun istante, dato da

$$\frac{1}{Y}\frac{\delta Y}{\delta T} = \frac{b}{Y} = \frac{b}{a + bT}$$

ed è positivo (se a e b sono positivi) ma decrescente al passare del tempo.

In generale una funzione $Z(T)$ che abbia un tasso di crescita costante, g, sarà caratterizzata da:

$$\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta T} = g$$

ossia

$$\frac{\delta Z}{\delta T} = gZ$$

L'unica funzione che possieda questa caratteristica è la funzione esponenziale, che possiamo indifferentemente scrivere in uno di questi tre modi:

$$Z = be^{gT} \tag{25}$$
$$Z = b\exp(gT)$$
$$\ln Z = \ln b + gT$$

e per la quale appunto abbiamo che:

$$\frac{\delta Z}{\delta T} = gZ$$

e

$$\frac{\delta \ln Z}{\delta T} = \frac{gZ}{Z} = g$$

(il tasso di crescita).

Una formula da non dimenticare

Supponiamo di osservare i valori iniziale e finale di una serie storica X, e chiediamo: qual è il tasso medio di crescita di X?

La risposta è sorprendentemente semplice se riflettiamo che la domanda posta può essere riformulata in questo modo: quale *tasso di crescita costante* avrebbe portato la variabile X dal punto d'inizio a quello finale? Per rispondere, dobbiamo usare la formula seguente:

$$\frac{\ln(\text{valore finale}) - \ln(\text{valore iniziale})}{\text{numero di periodi}}\,100$$

Infatti, se la variabile fosse cresciuta a un tasso costante, la variazione logaritmica così calcolata in riferimento a qualsiasi sottoperiodo (nel discreto) sarebbe uguale alla derivata logaritmica rispetto al tempo, ossia al tasso istantaneo di crescita.

Questa formula è molto facile e rapida da utilizzare (non è necessario conoscere l'intera serie storica: bastano i due valori estremi; né è necessario usare un PC: basta una qualsiasi calcolatrice tascabile che abbia le funzioni logaritmiche), ed è anche facile da memorizzare: in compenso, è molto più precisa di qualsiasi altro modo di calcolare i *tassi di crescita medi di lungo periodo* per qualsiasi variabile. Non dimenticatela!

8.2. I grafici semilogaritmici

Passiamo ora a studiare la rappresentazione grafica delle funzioni delle quali ci stiamo occupando. Sappiamo già che il tasso di crescita istantaneo di una qualsiasi funzione $W(T)$ è dato dalla sua derivata logaritmica rispetto al tempo. Questo implica che, se rappresentiamo sull'asse orizzontale il tempo e sull'asse verticale il logaritmo di W, allora la pendenza della retta rappresentata nel grafico misura, in ciascun punto, la derivata del logaritmo di W rispetto al tempo, ossia il tasso di crescita istantaneo di W. Questo spiega perché i grafici semilogaritmici sono popolari presso gli economisti: la pendenza delle curve dà una visione immediata del tasso di crescita della variabile considerata.

Per impratichirci nell'uso di questi grafici, e per persuaderci della loro utilità, costruiamo su foglio elettronico il grafico, prima in scala lineare e poi in scala logaritmica, di due variabili che variano in funzione del tempo:

- Funzione lineare: $Y = a + bT$
- Funzione esponenziale: $Z = a \exp(gT)$

Rappresenteremo queste funzioni per $T = (0, \ldots, 20)$ e per $a = 10$; $b = 0{,}9$; $g = 0{,}03 = 3\%$. Costruiamo pertanto il foglio elettronico nel modo seguente:

SCALA.XLS

	A	B	C	D	E
1	Funzione:	Lineare	Y = a + b*time	Esponenziale	Z = a*exp(g*time)
2	Parametri:	a =	10	a =	10
3		b =	0,90	g =	0,03
4	Variabili:	Time=	Y=		Z=
5		0	=$C$2+$C$3*B5		=$E$2*exp($E$3*B5)
6		=5+B5	…		…
7		…	…		…

Le righe 2 e 3, colonne C ed E, contengono la definizione dei parametri delle due funzioni.

Nella riga 5, dobbiamo immettere in colonna C la formula che definisce la Y, e in colonna E quella che definisce la Z. Notate i riferimenti in tali formule: quelli ai parametri sono riferimenti fissi, ossia ottenuti bloccando (con il simbolo $) sia la riga sia la colonna: ad esempio, il riferimento al tasso di crescita g, il cui valore è immesso nella casella E3, è dato da $E$3.

Nella casella B6 immettiamo la formula del tempo. Supponiamo (per economizzare lo spazio) di volere osservare la funzione ogni 5 periodi, dunque impostiamo un incremento di 5 tra una riga e l'altra.

In tutto, dobbiamo immettere solo 3 formule, rispettivamente nelle caselle C5, E5, B6. Poi usiamo il comando COPIA e INCOLLA per ricopiare ciascuna formula nelle caselle sottostanti. Alla fine le prime righe del foglio elettronico ci appariranno con i seguenti valori:

SCALA.XLS

	A	B	C	D	E
1	Funzione:	Lineare	Y = a + b*time	Esponenziale	Z = a*exp(g*time)
2	Parametri:	a =	10	a =	10
3		b =	0,90	g =	0,03
4	Variabili:	Time=	Y=		Z=
5		0	10,00		10,00
6		5	14,50		11,62
7		10	19,00		13,50

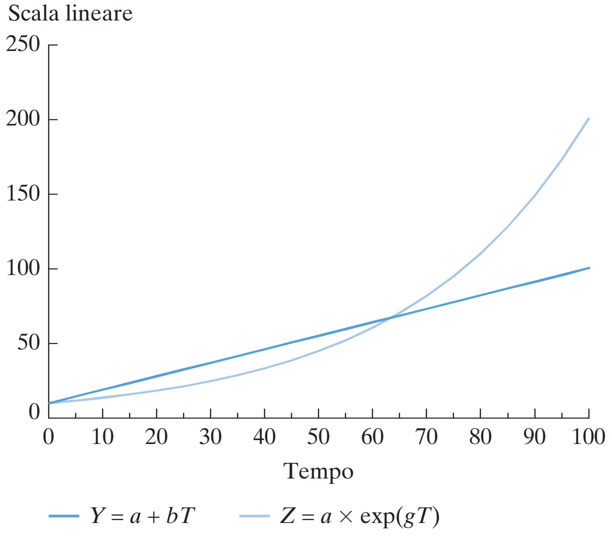

Figura 2

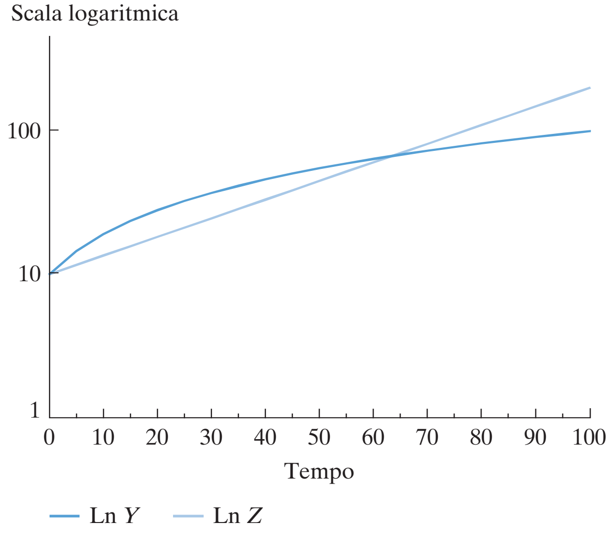

Figura 3

Per chi non vuole provarci da solo, il file Scala.xls contiene un foglio costruito secondo queste istruzioni. Il vantaggio di avere impostato le funzioni in questo modo è il seguente: se decidiamo di assegnare un nuovo valore ai quattro parametri delle nostre funzioni (nelle caselle C2, C3, E2, E3), le funzioni in alto (e gli eventuali grafici impostati sui valori di tali funzioni) vengono *istantaneamente aggiornate* ai nuovi valori.

A questo punto possiamo costruire il grafico in scala lineare. Scegliamo dal menu del foglio elettronico INSERISCI e poi GRAFICO, e seguiamo le istruzioni successive per l'*autocomposizione* del grafico. Nel file Scala.xls trovate impostati anche le due curve riprodotte nella figura 2.

Nella rappresentazione in scala lineare la funzione lineare Y appare come una retta e quella esponenziale Z ha invece una pendenza sempre crescente al crescere del tempo.

Costruiamo ora il grafico semilogaritmico. Usando programmi grafici più evoluti, potremmo scegliere automaticamente questo tipo di scala nell'impostazione del grafico. Sul nostro foglio elettronico, invece, dobbiamo prima generare il logaritmo di Y e di Z. Possiamo fare questo nelle prime colonne libere a destra di quelle già usate. Modifichiamo pertanto il file precedente inserendo le nuove formule nelle colonne F, G, H, come indicato qui sotto.

SCALA.XLS

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Funzione:	Lineare	Y = a + b*time	Esponenziale	Z = a*exp(g*time)			
2	Parametri:	a =	10	a =	10			
3		b =	0,90	g =	0,03			
4	Variabili:	Time=	Y=		Z=	Time	Ln Y	Ln Z
5		0	10,00		10,00	0	=ln(C5)	=ln(E5)
6		5	14,50		11,62	=5+F5		
7		10	19,00		13,50			

Al solito, ricopiamo le nuove formule nelle caselle rispettivamente sottostanti, e infine costruiamo un nuovo grafico utilizzando le nuove funzioni ln Y e ln Z. Il grafico apparirà come nella figura 3.

Come ci aspettavamo, la funzione ln Y, essendo la trasformazione logaritmica di una funzione lineare (Y), avrà andamento positivo e crescente, ma con pendenza decrescente: quest'ultima riflette infatti l'andamento decrescente del tasso di crescita di una funzione lineare.

Al contrario, la funzione ln Z, ossia la trasformazione logaritmica di una funzione esponenziale, ha una pendenza costante in ogni punto; questo rispecchia la costanza del tasso di crescita della funzione esponenziale Z.