Il modello IS-LM: derivazione analitica[1]

Ultima revisione May 12, 2014

Economia chiusa

Il mercato reale

L'equilibrio sul mercato dei beni e servizi - il cosiddetto mercato reale - e' descritto dalla curva IS. Le equazioni che descrivono il mercato reale in economia chiusa sono:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + \bar{G} \\ C &= C_0 + cY^d \\ I &= I_0 - ar \\ Y^d &= Y - T \\ T &= T_0 + tY \\ G &= \bar{G}. \end{aligned}$$

Le componenti della domanda aggregata sono quelle discusse in classe. Nota come il mercato reale sia descritto da 6 equazioni in 7 incognite: $\{Y, Y^d, C, I, r, T, G\}$. Quindi, vi e' un grado di liberta': ovvero, possiamo esprimere 6 delle incognite (a nostra scelta) come funzione della settima, rimanente, incognita. Per iniziare, possiamo derivare la curva IS, che descrive le combinazioni di tasso di interesse (r) e reddito (Y) tali per cui il mercato reale e' in equilibrio, ovvero:

$$Y = C + I + G. \tag{1}$$

[1]Un ottimo riferimento per la derivazione analitica del modello IS-LM in economia chiusa e aperta e' Dornbusch, Fisher, Startz, Canullo e Pettenati, Macroeconomia, McGraw Hill (capp. 5-7).

Per derivare analiticamente la curva IS, seguiamo la strategia suggerita dalla croce Keynesiana e imponiamo l'eguaglianza tra spesa programmata (o anche *domanda aggregata*) e spesa effettiva (Y):

$$
\begin{aligned}
Y &= C_0 + cY^d + I_0 - ar + \bar{G} \\
Y &= C_0 + c(Y - T_0 - tY) + I_0 - ar + \bar{G} \\
Y &= c(1-t)Y + C_0 - cT_0 + I_0 + \bar{G} - ar \\
Y(1 - c(1-t)) &= \underbrace{C_0 - cT_0 + I_0 + \bar{G}}_{A_0} - ar = A_0 - ar \\
-ar &= Y(1 - c(1-t)) - A_0 \\
r &= -\frac{1 - c(1-t)}{a} Y + \frac{A_0}{a}.
\end{aligned}
$$

Quindi, la curva IS e' descritta dalla seguente equazione:

$$
r = -\frac{1 - c(1-t)}{a} Y + \frac{A_0}{a}. \tag{2}
$$

Nota come la pendenza della curva IS nel piano (r, Y) sia sempre negativa:

$$
\frac{\partial r}{\partial Y} = -\frac{1 - c(1-t)}{a} < 0,
$$

dove $0 < c < 1, 0 < t < 1, a > 0$. Il termine $1 - c(1-t) > 0$ indica la propensione marginale al risparmio rispetto al reddito disponibile.

Caso speciale: $I = I(Y, r)$ Supponi ora che la curva della domanda di investimenti dipenda anche dal reddito aggregato (Y), oltre che dal tasso di interesse reale (r):

$$
I = I_0 - ar + vY^d,
$$

con $0 < v < 1$. Il parametro v indica la propensione marginale all'investimento rispetto al

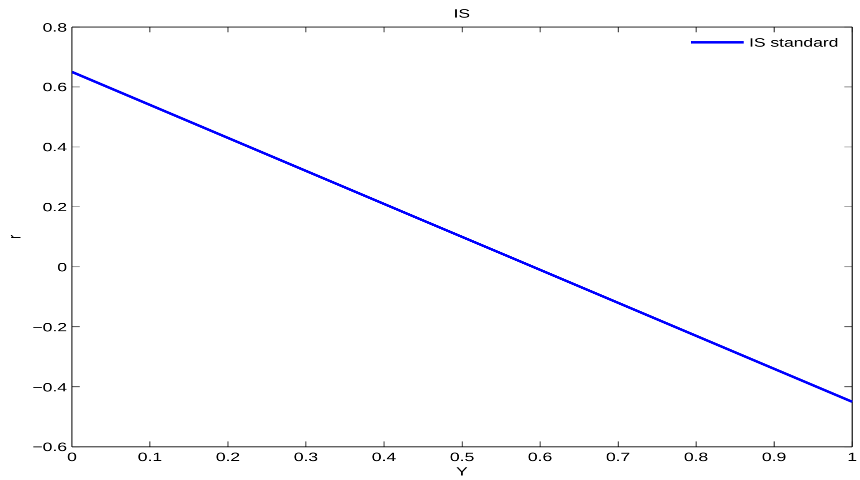

Figure 1: Curva IS

reddito disponibile. Deriviamo nuovamente la curva IS, per trovare che:

$$Y[1-(c+v)(1-t)] = A_1 - ar,$$

dove $A_1 = C_0 + I_0 + G - (c+v)T_0$.

Quindi, la curva IS in questo caso e' pari a:

$$r = -\frac{1-(c+v)(1-t)}{a}Y + \frac{A_1}{a}.$$

Nota come ora la pendenza della curva non sia sempre negativa. Infatti:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial Y} &= -\frac{1-(c+v)(1-t)}{a} < 0, \quad \text{se} \quad 0 < (c+v)(1-t) < 1, \\
\frac{\partial r}{\partial Y} &= -\frac{1-(c+v)(1-t)}{a} > 0, \quad \text{se} \quad (c+v)(1-t) > 1.
\end{aligned}$$

In particolare, quando $(c+v)(1-t) > 1$, la pendenza della spesa programmata nel grafico della croce keynesiana e' maggiore di 45 gradi. Questo accade quando la propensione marginale al risparmio e' inferiore alla proponesione marginale all'investimento:

$$1 - c(1-t) < v(1-t).$$

Quindi, l'interpretazione economica di una IS con pendenza positiva e' data dal fatto che all'aumentare di Y, l'offerta di risparmio aumenta meno rispetto all'aumento di domanda di investimento. Perche' il mercato dei beni sia in equilibrio, il tasso di interesse reale deve aumentare per incoraggiare l'offerta di risparmio e scoraggiare la domanda di investimento. Quando la domanda di investimenti non dipende dal reddito, all'aumentare di Y aumenta l'offerta di risparmio mentre la domanda di risparmio non varia. Quindi, e' necessario un minore tasso di interesse reale perche' il mercato dei beni sia in equilibrio. Nota anche il caso limite in cui, per valori del tasso di interesse al di sotto di una data soglia ($r < A_1/a$), il sistema sara' sempre in eccesso di domanda, a causa della componente di I indotta da Y (nel grafico della croce Keynesiana, l'intercetta della spesa programmata e' positiva e a quindi superiore alla bisettrice).

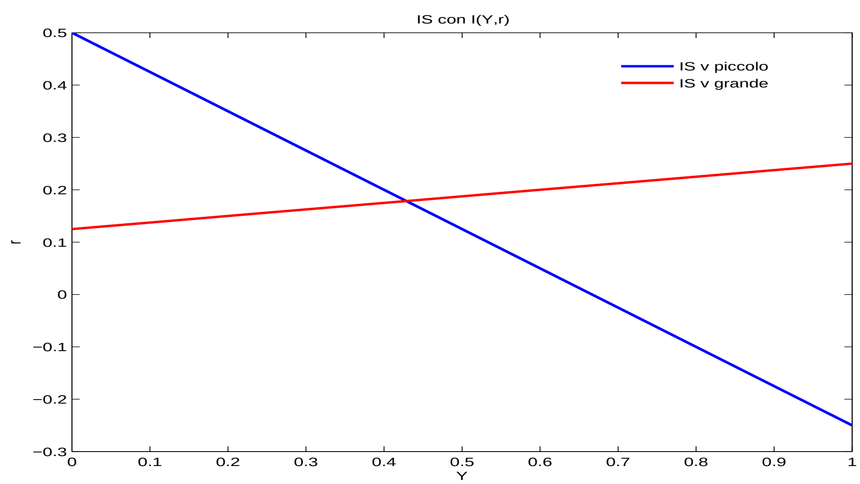

Figure 2: Curva IS nel caso speciale $I = I(Y, r)$

Il mercato monetario

L'equilibrio sul mercato della moneta e' dato dall'eguaglianza di domanda e offerta di moneta:

$$M^d = M^s. \tag{3}$$

L'equazione che descrive la domanda di moneta e': $M^d = kY + L_0 - mr$, mentre l'offerta e' esogena e controllata dalla banca centrale: $M^s = \bar{M}$. Quindi, l'equilibrio sul mercato della moneta puo' essere descritto dalla curva LM, che rappresenta combinazioni di tasso di interesse e reddito tali per cui esso e' in equilibrio:

$$\bar{M} = kY + L_0 - mr \quad \rightarrow \quad r = \frac{k}{m}Y + \frac{1}{m}(L_0 - \bar{M}). \tag{4}$$

La pendenza della curva LM e' positiva:

$$\frac{\partial r}{\partial Y} = \frac{k}{m} > 0,$$

dove $0 < k < 1, m > 0$.

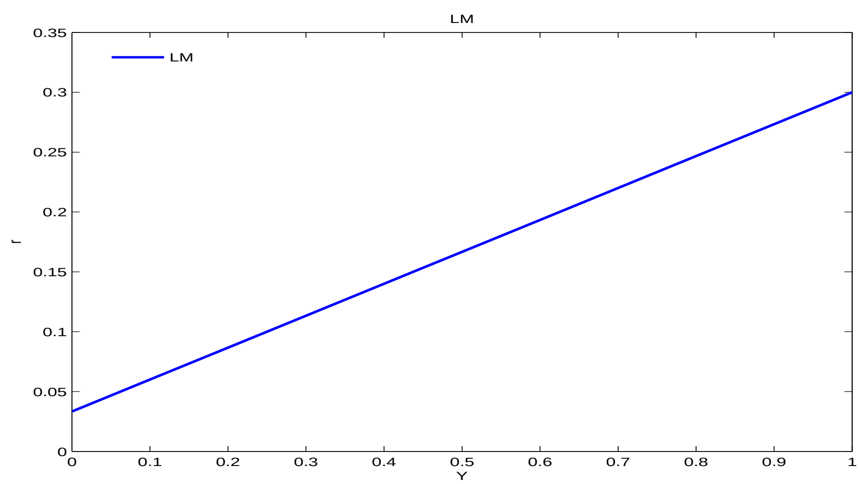

Figure 3: Curva LM

L'equilibrio

Il reddito e il tasso di interesse che soddisfano simultaneamente l'equilibrio sul mercato dei beni e quello della moneta rappresentano l'equilibrio (generale) dell'economia. Analiticamente, e' necessario risolvere il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} r = \frac{1}{a}A_0 - \frac{1-c(1-t)}{a}Y \\ r = \frac{k}{m}Y + \frac{1}{m}(L_0 - \bar{M}) \end{cases}$$

Per trovare l'equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{k}{m}Y + \frac{1}{m}(L_0 - \bar{M}) &= \frac{1}{a}A_0 - \frac{1-c(1-t)}{a}Y \\ (\frac{k}{m} + \frac{1-c(1-t)}{a})Y &= \frac{1}{a}A_0 - \frac{1}{m}(L_0 - \bar{M}) \\ (\frac{ak}{m} + 1 - c(1-t))Y &= A_0 - \frac{a}{m}(L_0 - \bar{M}) \end{aligned}$$

Quindi:

$$Y^{eq} = \frac{1}{\frac{ak}{m} + 1 - c(1-t)}A_0 - \frac{a/m}{\frac{ak}{m} + 1 - c(1-t)}(L_0 - \bar{M}). \tag{5}$$

Per trovare il tasso di interesse reale di equilibrio, possiamo sostituire il risultato dell'equazione (5) nell'equazione della IS o della LM. Per esempio, sostituendo (5) nell'equazione della LM otteniamo:

$$r^{eq} = \frac{k}{ak + m(1 - c(1-t))}A_0 + \frac{1 - c(1-t)}{ak + m(1 - c(1-t))}(L_0 - \bar{M}). \tag{6}$$

Dopo avere trovato i valori di equilibrio per il reddito e il tasso di interesse reale, possiamo analizzare l'effetto di diverse politiche.

Politica fiscale L'effetto sul reddito di un aumento della spesa pubblica finanziato a debito e' dato da:

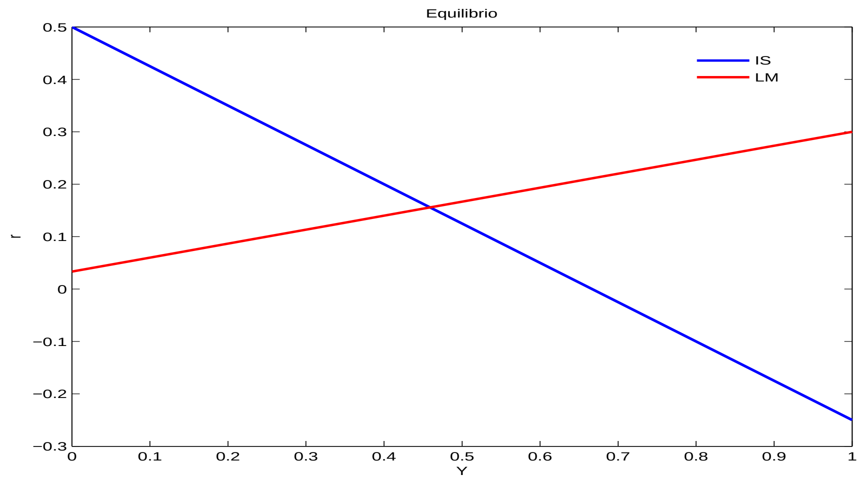

Figure 4: Equilibrio

$$\frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{1}{1 - c(1-t) + ak/m} > 0.$$

Nota come nel denominatore della espressione per il moltiplicatore della spesa pubblica, il termine ak/m denota l'effetto di retroazione monetaria. L'effetto sul tasso di interesse di un aumento della spesa pubblica e' dato da:

$$\frac{\Delta r}{\Delta G} = \frac{k}{m(1 - c(1-t)) + ak} > 0.$$

Politica monetaria L'effetto sul reddito di equilibrio di un aumento della offerta di moneta da parte della banca centrale e' dato da:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta M} = \frac{a}{m}\frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{a/m}{1 - c(1-t) + ak/m} > 0$$

L'effetto di una politica monetaria espansiva sul tasso di interesse e' invece dato da:

$$\frac{\Delta r}{\Delta M} = \frac{1 - c(1-t)}{m(1 - c(1-t)) + ak} < 0.$$

Nota come il caso della trappola della liquidita' e' dato da $m \to \infty$, dove m e' il parametro che caratterizza l'elasticita' della domanda di moneta al tasso di interesse. Quando $m \to \infty$ il tasso di interesse non varia all'aumentare della quantita' di moneta (la LM e' piatta). Ovvero, per un dato tasso di interesse, il pubblico e' disposto a detenere qualunque quantita' di moneta. In questo caso, la LM e' piatta e abbiamo che:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{1}{1 - c(1 - t)},$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta M} = 0,$$

$$\frac{\Delta r}{\Delta G} = 0,$$

$$\frac{\Delta r}{\Delta M} = 0,$$

Quindi, in trappola della liquidita' la politica fiscale e' piu' efficace, al contrario della politica monetaria. Infatti, la maggiore efficacia della politica monetaria dipende proprio dal fatto che il tasso di interesse non risponde all'incremento della domanda aggregata.

Il caso cosiddetto classico e' invece rappresentato da $m \to 0$ e quindi da una LM verticale. E' questo il caso della teoria quantitativa della moneta: il reddito nominale e' esclusivamente determinato dalla quantita' reale di moneta. In questo caso, la politica fiscale non e' efficace, al contrario di quella monetaria (nel breve period quando i prezzi sono fissi). Possiamo riassumere analiticamente l'effetto delle diverse politiche economiche nel caso classico come segue:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta G} = 0,$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta M} = 1/k,$$

$$\frac{\Delta r}{\Delta G} = 1/a,$$

$$\frac{\Delta r}{\Delta M} = \frac{1-c(1-t)}{ak}.$$

Nota come $\frac{\Delta Y}{\Delta M} = 1/k$ deriva dal limite per $m \to 0$ di $\frac{\Delta Y}{\Delta M}$. Infatti, dopo avere moltiplicato e diviso $\frac{\Delta Y}{\Delta M}$ per m abbiamo che:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta M}\frac{m}{m} = \frac{a}{m(1-c(1-t))+ak} \quad \lim_{m\to 0} = \frac{1}{k}.$$

Caso speciale: equilibrio in economia chiusa con $I(Y,r)$ Quando la domanda di investimenti dipende anche dal reddito, l'equilibrio e' dato da:

$$\begin{aligned}
Y^{eq} &= \frac{1}{\frac{ak}{m}+1-(c+v)(1-t)}A_1 - \frac{a/m}{\frac{ak}{m}+1-(c+v)(1-t)}(L_0-\bar{M}),\\
r^{eq} &= \frac{k}{ak+m(1-(c+v)(1-t))}A_1 - \frac{1-(c+v)(1-t)}{ak+m(1-(c+v)(1-t))}(L_0-\bar{M}).
\end{aligned}$$

Economia aperta

Consideriamo una piccola economia aperta, in regime di tasso di cambio flessibile e senza restrizioni ai movimenti di capitale.

Economia reale

L'equilibrio sul mercato dei beni in economia aperta e' dato da:

$$Y = C + I + G + NX. \tag{7}$$

Le equazioni che che descrivono le diverse componenti della domanda aggregata sono:

$$
\begin{aligned}
C &= C_0 + cY^d \\
I &= I_0 - ar \\
G &= \bar{G} \\
Y^d &= Y - T \\
T &= T_0 + tY \\
NX &= EX - IM \\
EX &= \mu Y^* - \psi e \\
IM &= \phi Y^d + \theta e
\end{aligned}
$$

dove e e denota il tasso di cambio nominale[2]. Nota come il tasso di cambio sia espresso come unita' di moneta estera per una unita' di moneta domestica (per esempio, se il paese domestico e' l'Italia e quello estero gli Stati Uniti avremmo Dollari per Euro). Quindi, un aumento di e implica un apprezzamento del tasso di cambio nominale. Per esempio, se $e \uparrow$ allora $EX \downarrow$ e $IM \uparrow$.

Per derivare l'equazione della IS nel caso di economia aperta:

$$
\begin{aligned}
Y &= C_0 + c(1-t)Y - cT_0 + I_0 + \bar{G} - ar + \mu Y^* - \psi e - \phi(1-t)Y + \phi T_0 - \theta e \\
Y &= (c-\phi)(1-t)Y - (c-\phi)T_0 - (\psi+\theta)e + \mu Y^* + C_0 + I_0 + \bar{G} - ar \\
A_3 - ar &= (1-(c-\phi)(1-t))Y
\end{aligned}
$$

dove $A_3 = C_0 + I_0 + \bar{G} + \mu Y^* - (\psi+\theta)e - (c-\phi)T_0$.

[2]Ricorda che stiamo considerando il breve periodo, in cui i prezzi sono fissi. Per questa ragione, possiamo utilizzare tasso di cambio reale o nominale nelle equazioni della domanda netta di esportazioni.

Quindi, l'equazione della curva IS e' la seguente:

$$r = \frac{A_3}{a} - \frac{1-(c-\phi)(1-t)}{a}Y. \tag{8}$$

La pendenza e' pari a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial Y} &= -\frac{1-(c-\phi)(1-t)}{a} < 0 \quad \text{se} \quad 0 < (c-\phi)(1-t) < 1 \\
\frac{\partial r}{\partial Y} &= -\frac{1-(c-\phi)(1-t)}{a} > 0 \quad \text{se} \quad (c-\phi)(1-t) > 1
\end{aligned}$$

Per un dato livello di Y, un apprezzamento (aumento) del tasso di cambio nominale provoca uno spostamento verso sinistra della curva IS in quanto diminuisce la domanda netta di esportazioni. Al contrario, un aumento del reddito estero comporta un aumento della domanda aggregata e uno spostamento verso destra della curva IS. In termini analitici, possiamo calcolare i due effetti guardando alle seguenti derivate:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial e} &= -\frac{\psi+\theta}{a} < 0 \quad \rightarrow \text{spostamento a sinistra} \\
\frac{\partial r}{\partial Y^*} &= \frac{\mu}{a} > 0 \quad \rightarrow \text{spostamento a destra}
\end{aligned}$$

Mercato monetario

La relazione di equilibrio sul mercato monetario descritta dalla LM non e' cambiata rispetto al caso di economia chiusa. Quindi, le combinazioni di tasso di interesse reale e reddito tali per cui il mercato monetario e' in equilibrio sono caratterizzate dalla equazione (4).

Bilancia dei pagamenti

La bilancia dei pagamenti BP e' data dalla differenza tra esportazioni nette (NX) e saldo del conto fiscale (CF). Quest'ultimo registra il saldo netto di flussi di capitale tra l'economia in analisi e il resto del mondo. In generale, possiamo supporre che il conto fiscale dipenda dal differenziale di tasso di interesse reale domestico e estero: $CF = CF(r - r^*)$. Quando $r > r^*$, in assenza di restrizioni ai movimenti di capitale, registriamo un afflusso di capitali dal resto del momento verso la piccola economia aperta. Possiamo per esempio assumere una forma lineare per il saldo del conto fiscale:

$$CF = \beta(r - r^*).$$

Come discusso in classe, il saldo della bilancia dei pagamenti deve essere pari a 0:

$$BP = \mu Y^* - \psi e - \phi Y^d - \theta e + \beta r - \beta r^* = 0. \tag{9}$$

Quindi, possiamo esprimere la relazione $BP = 0$ in un piano r, Y come segue:

$$r = r^* + \frac{1}{\beta}\phi(1-t)Y + \frac{1}{\beta}A_5,$$

dove $A_5 = [\psi e - \phi T_0 + \theta e - \mu Y^*]$. L'intuizione economica e' come segue: all'aumentare del reddito le importazioni aumentano (infatti, $\phi(1-t)$ descrive la propensione marginale alle importazioni rispetto al reddito) e le esportazioni nette peggiorano. Per mantenere la bilancia dei pagamenti in pareggio, il tasso di interesse interno deve aumentare rispetto a quello estero per attrarre capitali dall'estero. In una piccola economia con perfetta mobilita' dei capitali il parametro $\beta \to \infty$. In questo caso, la parita' della bilancia dei pagamenti implica che:

$$r = r^*,$$

e la curva $BP = 0$ e' orizzontale: questo e' proprio il caso analizzato in classe. La derivazione analitica dimostra come il risultato che $r = r^*$ dipenda da una ipotesi sui parametri, all'interno di un modello piu' generale. In particolare, nel piano (r, Y) la curva $BP = 0$ ha una pendenza positiva quando $\beta > 0$. La curva e' invece verticale quando $\beta \to 0$ (assenza di mobilita' dei capitali), ed e' orizzontale quando $\beta \to \infty$ (perfetta mobilita' dei capitali).

Equilibrio in economia aperta

L'equilibrio in economia aperta richiede sostanzialmente di trovare l'intersezione tra IS, LM e $BP = 0$. Quindi, dal punto di vista analitico:

$$\begin{cases} r = \frac{A_3}{a} - \frac{1-(c-\phi)(1-t)}{a} Y \\ r = \frac{k}{m} Y + \frac{1}{m}(L_0 - \bar{M}) \\ r = r^*, \end{cases}$$

dove $A_3 = C_0 + I_0 + \bar{G} + \mu Y^* - (\psi + \theta)e - (c - \phi)T_0$. Nota come possiamo utilizzare la relazione $BP = 0 \to r = r^*$ per semplificare il problema. In particolare, possiamo ridurre il sistema in due equazioni (IS, LM) e due incognite (e, Y), come abbiamo fatto graficamente in classe. In un piano (e, Y), la LM e' verticale in quanto non dipende dal tasso di cambio. Quindi, il reddito di equilibrio e' semplicemente dato da:

$$Y^{eq} = \frac{m}{k} r^* - \frac{1}{k}(L_0 - \bar{M}).$$

Per trovare il tasso di cambio di equilibrio, dobbiamo ora sostituire Y^{eq} nella IS. Nota che avremmo potuto anche derivare la IS di economia aperta come combinazione di tasso di cambio e reddito tali per cui il mercato dei beni e' in equilibrio. In questo caso:

$$e = -\frac{a}{\psi + \theta} r^* + \frac{A_6}{\psi + \theta} - \frac{1 - (c - \phi)(1 - t)}{\psi + \theta} Y,$$

dove $A_6 = C_0 + I_0 + \bar{G} + \mu Y^* - (c - \phi)$. Sostituendo Y^{eq} nella IS otteniamo:

$$e^{eq} = \frac{1}{\psi+\theta}\{[\frac{m(1-(c-\phi)(1-t))+ak}{k}]r^* + A_6 + \frac{1}{k}[1-(c-\phi)(1-t)](L_0 - \bar{M})\}.$$

Caso speciale: $I = I(Y, r)$ In questo caso, seguendo quanto fatto per l'economia chiusa troviamo che:

$$Y(1-(c+v-\phi)(1-t)) = A_4 - ar,$$

dove $A_4 = C_0 + I_0 + \bar{G} + \mu Y^* - (\psi+\theta)e - (c+v-\phi)T_0$. Quindi, l'equazione della curva IS e' come segue:

$$r = \frac{1}{a}A_4 - \frac{1-(c+v-\phi)(1-t)}{a}Y.$$

Nulla cambia rispetto al caso standard per quanto riguarda spostamenti della curva IS a seguito di variazioni del tasso di cambio reale, o del reddito estero. Per quanto riguarda la pendenza, puo' essere positiva o negativa a seconda dei parametri scelti:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial Y} &= -\frac{1-(c+v-\phi)(1-t)}{a} < 0 \quad \text{se} \quad 0 < (c+v-\phi)(1-t) < 1 \\
\frac{\partial r}{\partial Y} &= -\frac{1-(c+v-\phi)(1-t)}{a} > 0 \quad \text{se} \quad (c+v-\phi)(1-t) > 1
\end{aligned}$$

Alcuni moltiplicatori

Infine, nota le seguenti relazioni:

- In economia chiusa caso standard:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta T_0} = -c\frac{\Delta Y}{\Delta G}.$$

- In economia chiusa, con $I(Y, r)$:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta T_0} = -(c+v)\frac{\Delta Y}{\Delta G}.$$